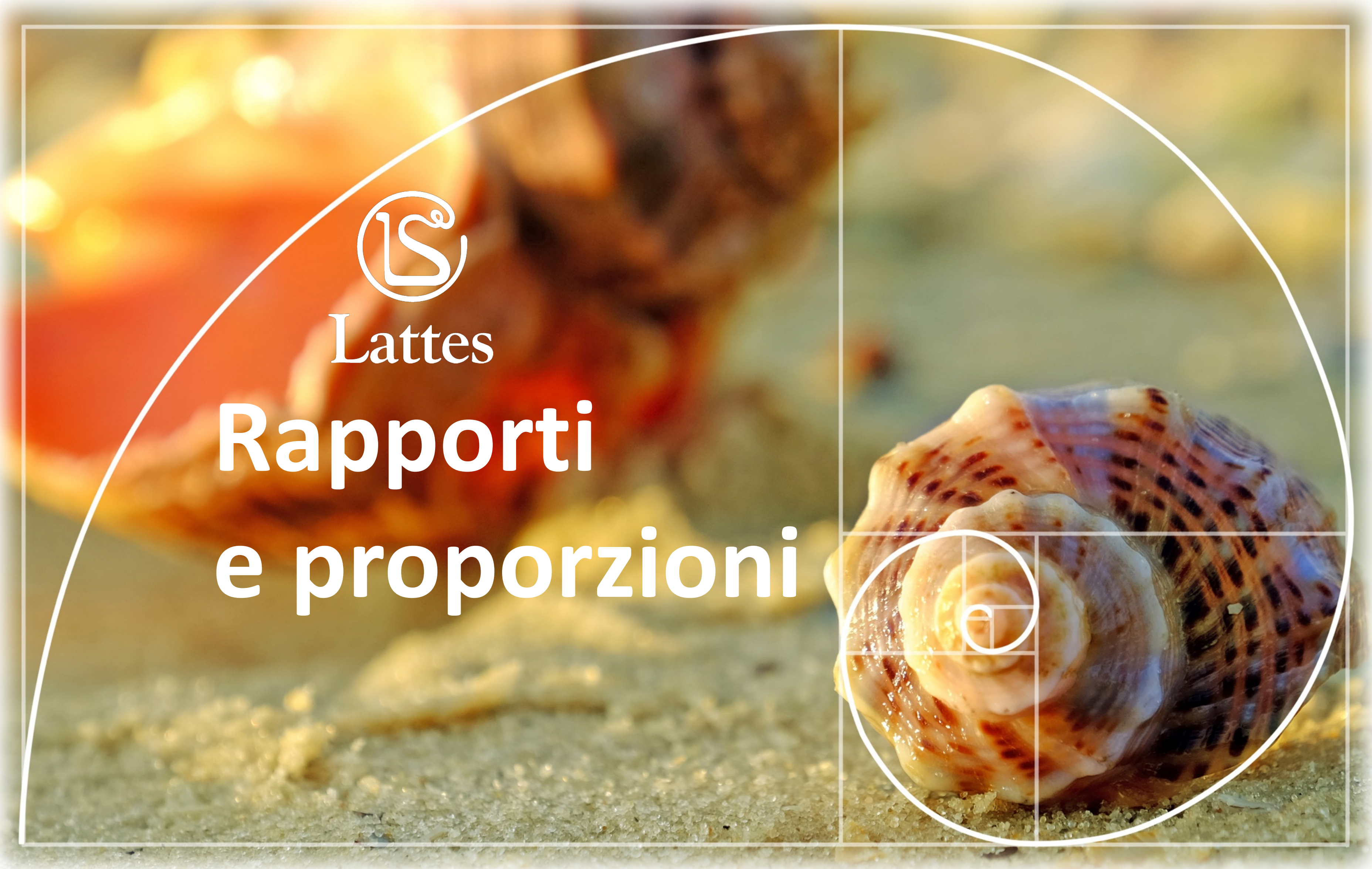
Lattes
Rapporti
e proporzioni

Rapporto tra due numeri

Il **rapporto** fra due numeri *a* e *b* (con $b \neq 0$) è il loro **quoziente** ottenuto dividendo il primo per il secondo:

$\boldsymbol{a : b}$ oppure $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$

termini del rapporto

antecedente $\leftarrow a : b \rightarrow$ conseguente

Un rapporto può essere espresso sotto forma di divisione, di frazione o di numero decimale.

Cambiando l'ordine dei termini, invertendo cioè antecedente e conseguente, otteniamo il **rapporto inverso**.

Dato il rapporto $a : b$ (con $a \neq 0$ e $b \neq 0$), $b : a$ è il **rapporto inverso**.

I rapporti diretto e inverso sono espressi da due frazioni reciproche e **il loro prodotto è 1**.

Rapporto tra grandezze omogenee e non omogenee

GRANDEZZE OMOGENEE

Consideriamo il rapporto fra **due grandezze omogenee**, cioè **dello stesso tipo ed espresse nella stessa unità di misura**.

Il rapporto fra due grandezze omogenee (con la seconda diversa da zero) è il quoziente fra le loro misure espresse con la stessa unità di misura.

Il rapporto tra due grandezze omogenee **è un numero puro** cioè un numero privo di unità di misura.

- Se il rapporto è un **numero razionale** le **grandezze** si dicono **commensurabili:**

  $32 : 48 = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$

- Se il rapporto è un **numero irrazionale** le **grandezze** si dicono **incommensurabili**:

  $$\frac{7 \cdot \sqrt{2}}{7} = 2$$

Rapporto tra grandezze omogenee e non omogenee

GRANDEZZE NON OMOGENEE

Consideriamo il rapporto fra **due grandezze non omogenee**, cioè **di diverso tipo e quindi non espresse nella stessa unità di misura**.

Il rapporto tra due grandezze non omogenee **non è un numero** puro, ma una nuova grandezza.

Il rapporto fra due grandezze non omogenee è il quoziente tra le loro misure e costituisce una nuova grandezza (**grandezza derivata**) espressa in una nuova unità di misura.

Lattes

Ingrandimenti e riduzioni

Un'importante **applicazione del rapporto fra grandezze omogenee** si utilizza quando si deve ridurre o ingrandire il disegno di un oggetto.

- Il rapporto fra il segmento ridotto e il segmento di partenza si dice **rapporto di riduzione** e ha un valore < 1.
- Il rapporto fra il segmento ingrandito e il segmento di partenza si dice **rapporto di ingrandimento** e ha un valore > 1.

Le rappresentazioni in cui le dimensioni degli oggetti vengono tutte ugualmente ridotte o ingrandite, secondo lo stesso rapporto, sono dette **rappresentazioni in scala**:

- **riduzione** in scala se il rapporto è < 1;
- **ingrandimento** in scala se il rapporto è > 1.

La **scala** è il rapporto tra la misura di una distanza sulla carta (**distanza grafica**) e la misura della stessa distanza nella realtà (**distanza reale**) espresse entrambe nella stessa unità di misura.

Proporzioni

Una **proporzione** è l'uguaglianza tra due rapporti.

Quattro numeri *a*, *b*, *c*, *d* (con $b \neq 0$ e $d \neq 0$) presi nell'ordine in cui sono scritti formano una **proporzione** se il rapporto fra il primo e il secondo è uguale al rapporto tra il terzo e il quarto:

antecedenti

$$a : b = c : d$$

conseguenti

estremi

$$a : b = c : \boxed{d}$$

quarto proporzionale

medi

Se in una proporzione i medi sono uguali, la proporzione si dice continua:

estremi

$$a : b = b : \boxed{c}$$

terzo proporzionale

medio proporzionale

Proprietà delle proporzioni

PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:

se $\boldsymbol{a : b = c : d}$ **allora** $\boldsymbol{a \times d = b \times c}$

Quattro numeri (a, b, c, d con $b \neq 0$ e $d \neq 0$) nell'ordine scritto formano una proporzione se il prodotto del primo per il quarto è uguale al prodotto del secondo per il terzo:

$$4 : 14 = 2 : 7$$

infatti

$$4 \times 7 = 14 \times 2$$

Proprietà delle proporzioni

PROPRIETÀ DELL'INVERTIRE

Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente si ottiene ancora una proporzione.

Data la proporzione:

$6 : 5 = 18 : 15$

se scambiamo ogni antecedente con il proprio conseguente, otteniamo:

$5 : 6 = 15 : 18$

È ancora una proporzione in cui vale la proprietà fondamentale:

$5 \times 18 = 6 \times 15$

Proprietà delle proporzioni

PROPRIETÀ DEL PERMUTARE

Se in una proporzione si scambiano i medi, gli estremi o entrambi si ottiene ancora una proporzione.

Data la proporzione:

$6 : 5 = 18 : 15$

scambiamo fra di loro:

gli estremi	i medi	i medi e gli estremi
$15 : 5 = 18 : 6$	$6 : 18 = 5 : 15$	$15 : 18 = 5 : 6$

È ancora una proporzione in cui vale la proprietà fondamentale.

Applicando le proprietà del permutare e dell'invertire a una proporzione se ne possono ricavare altre sette con gli stessi termini:

proporzione di partenza

$$42 : 4 = 21 : 2 \longleftarrow \boxed{2 : 4 = 21 : 42} \longrightarrow 2 : 21 = 4 : 42 \longrightarrow 42 : 21 = 4 : 2$$

$\boxed{\text{permuto gli estremi}}$ $\boxed{\text{inverto}}$ $\boxed{\text{permuto i medi}}$ $\boxed{\text{permuto gli estremi}}$

$$21 : 2 = 42 : 4 \longleftarrow \boxed{4 : 2 = 42 : 21} \longrightarrow 4 : 42 = 2 : 21 \longrightarrow 21 : 42 = 2 : 4$$

Proprietà delle proporzioni

PROPRIETÀ DEL COMPORRE

In ogni proporzione la somma del primo e del secondo termine sta al primo termine (o al secondo) come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo termine (o al quarto).

Data la proporzione:

6 : **5** = **18** : **15**

si possono ottenere due nuove proporzioni:

- (**6** + **5**) : **6** = (**18** + **15**) : **18** cioè 11 : 6 = 33 : 18
- (**6** + **5**) : **5** = (**18** + **15**) : **15** cioè 11 : 5 = 33 : 15

Le scritture precedenti sono ancora delle proporzioni in quanto per esse vale la proprietà fondamentale.

Lattes

Proprietà delle proporzioni

PROPRIETÀ DELLO SCOMPORRE

In ogni proporzione, con ciascun antecedente maggiore del proprio conseguente, la differenza fra il primo e il secondo termine sta al primo termine (o al secondo) come la differenza fra il terzo e il quarto termine sta al terzo termine (o al quarto).

Data la proporzione:

$6 : 5 = 18 : 15$

si possono ottenere due nuove proporzioni:

- $(6 - 5) : 6 = (18 - 15) : 18$ cioè $1 : 6 = 3 : 18$
- $(6 - 5) : 5 = (18 - 15) : 15$ cioè $1 : 5 = 3 : 15$

Le scritture precedenti sono ancora delle proporzioni in quanto per esse vale la proprietà fondamentale.

Ricerca del termine incognito

CALCOLO DI UN ESTREMO INCOGNITO

In una proporzione il valore di un estremo incognito è uguale al prodotto dei medi diviso l’altro estremo.

Data la proporzione:

$16 : 8 = 14 : x$

calcoliamo l’estremo incognito:

$$x = \frac{\overbrace{\overset{1}{\cancel{8}} \cdot 14}^{\text{prodotto medi}}}{\underbrace{\cancel{16}_{2}}_{\text{estremo noto}}} = 7$$

La proporzione cercata sarà:

$16 : 8 = 14 : 7$

Ricerca del termine incognito

CALCOLO DI UN MEDIO INCOGNITO

In una proporzione il valore di un medio incognito è uguale al prodotto degli estremi diviso l'altro medio.

Data la proporzione:

$35 : x = 16 : 32$

calcoliamo il medio incognito:

$$x = \frac{\overbrace{35 \cdot \cancel{32}^{2}}^{\text{prodotto degli estremi}}}{\underbrace{\cancel{16}_{1}}_{\text{medio noto}}} = 70$$

La proporzione cercata sarà:

$35 : \mathbf{70} = 16 : 32$

Ricerca del termine incognito

CALCOLO DEL MEDIO PROPORZIONALE

In una proporzione continua il valore del medio proporzionale incognito è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi.

Data la proporzione:

$63 : x = x : 7$

calcoliamo il medio proporzionale:

$$x = \sqrt{\underbrace{63 \cdot 7}_{\textbf{prodotto degli estremi}}} = \sqrt{441} = 21$$

La proporzione cercata sarà:

$63 : 21 = 21 : 7$

Catena di rapporti uguali

L'uguaglianza di tre o più rapporti costituisce una **catena di rapporti uguali**:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{12}{18}$$

che si può scrivere anche nel seguente modo:

$$2 : 3 = 4 : 6 = 12 : 18$$

I tre rapporti sono tutti uguali a $\frac{2}{3}$; i numeri 2, 4, 12 sono gli antecedenti mentre i numeri 3, 6, 18 sono i conseguenti.

Per le catene di rapporti uguali valgono la **proprietà dell'invertire**, ogni antecedente con il proprio conseguente, e la **proprietà del comporre**.

In una catena di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al proprio conseguente.